UNIDAD N° 1 – CONJUNTOS

El concepto de conjunto es intuitivo y podríamos definirlo simplemente como una colección de objetos bien definidos y diferenciables entre sí, de manera que se puede afirmar con certeza si cualquier objeto dado pertenece o no al conjunto.

Denotaremos a los conjuntos con letras mayúsculas y sus elementos se encierran entre llaves. Llamaremos elemento, a cada uno de los objetos que forman parte de un conjunto, estos elementos tienen carácter individual.

En teoría de conjuntos, no se acostumbra a repetir elementos, así el conjunto:

$$A = \{a, s, d, s, a, d, f\} = \{a, s, d, f\}$$

El cardinal de un conjunto indica la cantidad de elementos que posee. El cardinal de un conjunto se representa por $\#A$ que, en el ejemplo anterior, es $\#A = 4$.

Cuando un elemento x pertenece a un conjunto A se expresa de forma simbólica como: $x \in A$. En caso de que un elemento y no pertenezca a este mismo conjunto se utiliza la notación: $y \notin A$.

Un conjunto puede definirse de las siguientes formas:

- Por **extensión**: enumerando todos y cada uno de sus elementos, es decir que se realiza un listado de todos los elementos del conjunto.
- Por **comprensión**: enunciando la propiedad que lo caracteriza, ya sea mediante palabras o a través de una proposición simbólica.

Para poder decidir si un elemento pertenece o no a un conjunto, es necesario que dicho conjunto esté bien definido.

Cuando el conjunto está definido por enumeración no se presentan dificultades, ya que para determinar si un elemento pertenece a un conjunto es suficiente verificar si figura en la lista de los elementos del conjunto. Pero si el conjunto está definido por comprensión, la propiedad debe ser claramente indicada para que todos puedan decidir con el mismo criterio.

Conjuntos especiales

- Conjunto vacío: Se denota por $\emptyset$ o $\{\ \}$. Se trata de aquél conjunto que no posee elementos.
- Conjunto universal: Denotado por U. Es aquel conjunto referencial que contiene a todos los elementos bajo consideración en cada situación particular.
- Conjunto unitario: Conjunto que contiene un solo elemento.
- Conjunto finito: Son conjuntos con una cantidad limitada de elementos.
- Conjuntos infinitos: Son conjuntos con una cantidad ilimitada de elementos.

Diagramas de Venn

Los conjuntos se suelen representar gráficamente mediante *Diagramas de Venn*, con una línea que encierra a sus elementos. Así, todas las operaciones entre conjuntos se pueden representar gráficamente con el fin de obtener una idea más intuitiva.

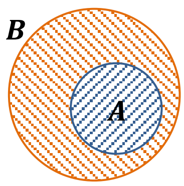
Subconjuntos

Si A y B son conjuntos del universo U, se dice que A es un subconjunto de B, si todo elemento de A lo es también de B. Simbólicamente:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

Decir que A es un *subconjunto* de B equivale a decir que A *está incluido en* B y también que B *incluye a* A.

Gráficamente:



$A \subset B$

$B \supset A$

Propiedades

1. Todo conjunto está incluido en sí mismo: $A \subset A$.
2. El conjunto vacío se considera incluido en cualquier conjunto: $\emptyset \subset A$.

Si A no está incluido en B (o A no es subconjunto de B) significa que por lo menos un elemento de A no pertenece a B.

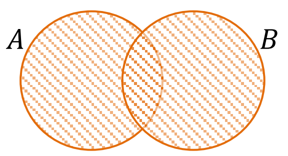
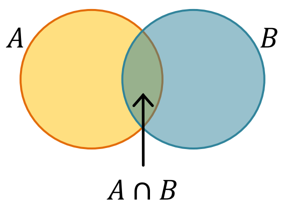
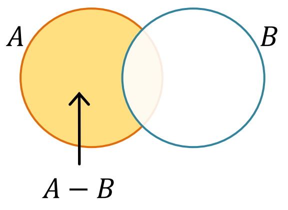
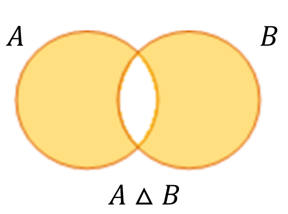
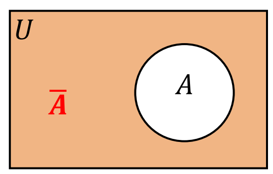
Igualdad entre conjuntos

Dos conjuntos A y B se dicen *iguales*, lo que se escribe $A = B$, si constan de los mismos elementos. Es decir, siempre que para cualquiera que sea el elemento x, se verifique: $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Operaciones entre conjuntos

Para los conjuntos $A, B \subset U$, definimos las siguientes operaciones entre conjuntos:

Operación		Simbólicamente	Diagrama de Venn
Unión	La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por objetos que son elementos de A o de B.	$A \cup B = \{x \ / \ x \in A \vee x \in B\}$	
Intersección	Se llama intersección de dos conjuntos A y B, al conjunto formado por objetos que son elementos de A y de B.	$A \cap B = \{x \ / \ x \in A \wedge x \in B\}$	
Diferencia	La diferencia entre A y B es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.	$A - B = \{x \ / \ x \in A \wedge x \notin B\}$	
Diferencia simétrica	Se llama diferencia simétrica de A y B, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B, pero no a su intersección.	$A \vartriangle B = \{x/(x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$	
Complemento	La diferencia $U - A$ se llama complemento de A respecto de U, y se denota A^C o $\bar{A}$.	$\bar{A} = \{x \ / \ x \in U \wedge x \notin A\}$	

PROPIEDADES	**UNIÓN**	**INTERSECCIÓN**
1.- Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
2.- Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
3.- Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4.- Absorción	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
5.- Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6.- Complementariedad	$A \cup \bar{A} = U$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$

Leyes de D´Morgan: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Conjuntos disjuntos

Si dos conjuntos A y B son tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces A y B se dicen *disjuntos*. Es decir, dos conjuntos disjuntos no poseen elementos en común.

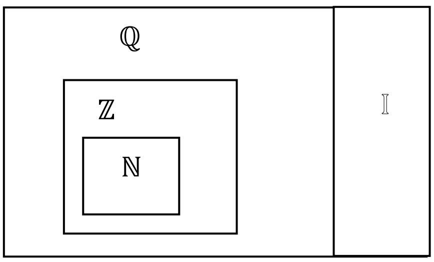
Conjunto partes de A: $P(A)$

Dado un conjunto A definimos el conjunto partes de A, y se denota $P(A)$, al conjunto formado por todos los subconjuntos de A. En símbolos:

$$P(A) = \{X / X \subset A\}$$

Si el cardinal del conjunto A es: $\#A = n$, el cardinal del conjunto $P(A)$ será: $\#P(A) = 2^n$.

Conjunto de números reales



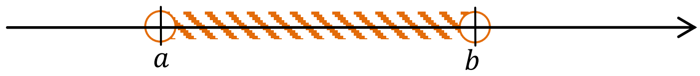
Simbolizamos:
$\mathbb{R}$: números reales
$\mathbb{I}$: números irracionales
$\mathbb{Q}$: números racionales
$\mathbb{Z}$: números enteros
$\mathbb{N}$: números naturales

A cada número real le corresponde un único punto de la recta y cada punto de la recta representa un número real. A esa recta la llamamos **recta real**.

Ciertos conjuntos de números reales, llamados intervalos, se presentan frecuentemente en el cálculo y geométricamente corresponden a segmentos de recta. Por ejemplo, si $a < b$, entonces el *intervalo abierto* desde a hasta b está integrado por todos los números comprendidos entre a y b y se denota: (a, b). Utilizando la notación de conjuntos, podemos escribir:

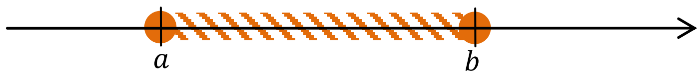
$$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

Los extremos a y b no están incluidos en este intervalo. Gráficamente:



El intervalo cerrado de a a b es el conjunto:

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$



<u>Símbolos</u>

$x\ /\ x$	x tal que x	$\forall$	para todo
$<$	menor	$\emptyset$	conjunto vacío
$>$	mayor	$\{\}$	conjunto vacío
$\leq$	menor o igual	$\Leftrightarrow$	si y sólo si
$\geq$	mayor o igual	$\Rightarrow$	entonces
$=$	igual	$\#$	cardinal
$\in$	pertenece	$\sum$	sumatoria
$\notin$	no pertenece	Δ	diferencia simétrica
$\subset$	incluído	∞	infinito
$\not\subset$	no incluído	$\sim$	semejante
$\exists$	existe	$P(A)$	conjunto partición de A
$\cup$	unión	$\cap$	intersección

TRABAJO PRÁCTICO N° 1 – CONJUNTOS

Ejercicio 1 Defina por extensión o por comprensión, según sea el caso:

a. $C = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$
b. $D = \{x/x\ es\ un\ múltiplo\ de\ 4\ menor\ que\ 6\}$
c. $A = \{x/x\ es\ un\ múltiplo\ natural\ de\ 2\ menor\ que\ 1\}$
d. $B = \{primavera, verano, otoño, invierno\}$
e. $E = \{x/x\ es\ una\ letra\ de\ la\ palabra\ \boldsymbol{verano}\}$
f. $F = \{x/x = \dot{5} \wedge x < 42\}$
g. $D = \{5; 7; 9; 11\}$

Ejercicio 2 Indique si los siguientes conjuntos del ejercicio 1 son vacíos, unitarios, finitos o infinitos.

Ejercicio 3 Determine si los conjuntos A y B de cada grupo son iguales o no.

a. $A = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 5\}$
$B = \{x/x\ \ es\ un\ número\ natural\ menor\ o\ igual\ que\ 4\}$
b. $A = \{x/x\ \ es\ un\ día\ de\ la\ semana\}$
$B = \{jueves\}$

Ejercicio 4 Forme el potencial, o conjunto partes, de los siguientes conjuntos:

$$A = \{a\} \qquad B = \emptyset \qquad C = \{a, b, c\}$$

Indique el número de elementos de cada potencial.

Ejercicio 5 Si $A = \{m, n, p\}$, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

a. $m \in A$
b. $m \in P(A)$
c. $\{m\} \in A$
d. $\{m\} \in P(A)$
e. $m \subset A$
f. $\{m\} \subset A$
g. $\{m\} \subset P(A)$
h. $\emptyset \in A$
i. $\emptyset \in P(A)$
j. $\emptyset \subset A$

Ejercicio 6 Los alumnos de un determinado curso planifican los campamentos a realizar durante el año, en tres lugares: Chascomús, Córdoba, y Neuquén.

¿Cuántos proyectos distintos pueden hacer, contando desde la posibilidad de no ir a ninguno hasta ir a los tres campamentos?

Ejercicio 7 Con un conjunto de 3 colores $C = \{a, b, c\}$, se confeccionan barriletes. ¿Cuántas combinaciones de 2 colores se pueden hacer con el conjunto C? ¿Cuántas de tres colores?.

Ejercicio 8 Dados los conjuntos $\mathcal{U} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, $A = \{1; 2; 3; 4\}$ y $B = \{3; 4; 5\}$.

a. Determine por extensión: $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$; $\bar{A}$; $\bar{B}$.
b. Realice un diagrama de Venn para cada caso.

Ejercicio 9 Si $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{b, c, f, g\}$

a. Determine: $A \cap B$; $A \cup B$; $A - B$; $B - A$.
b. Dibuje el diagrama para cada caso.

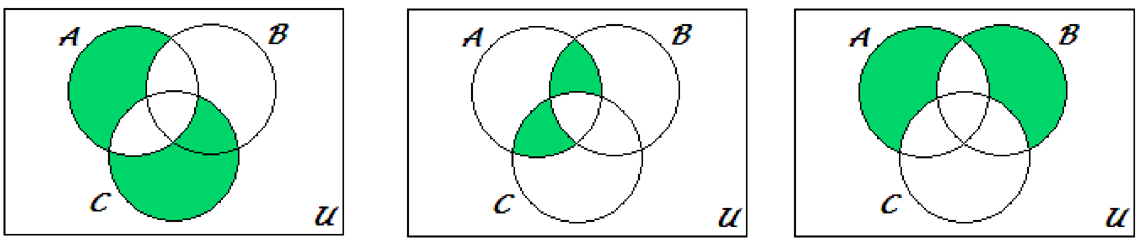
Ejercicio 10 Verifique las leyes de D´Morgan para los conjuntos A y B del ejercicio 8.

(Recordar: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$)

Ejercicio 11 Sombree en un esquema la zona que corresponde a la operación indicada.

a. $A \cup B \cup C$
b. $\mathrm{A} - (\mathrm{B} - \mathrm{C})$
c. $A \cap B - C$
d. $A \cap (B \cup C)$
e. $\bar{A} \cap \bar{B}$
f. $\overline{A \cup B}$

Ejercicio 12 Exprese el conjunto representado como una operación entre A, B y C.



Ejercicio 13 Escriba como intervalos o como unión de intervalos los siguientes conjuntos y represente en la recta real.

a. $A = \{x/x \in R^+\}$
b. $B = \{x/x \notin R^-\}$
c. $C = \{x/x \geq 2 \ \wedge \ x \geq 1\}$
d. $D = \{x/x \geq 2 \ \vee \ x \geq 1\}$
e. $E = \{x/-6 \leq x \leq 4 \ \vee \ -3 < x < 5\}$
f. $F = \{x/x > 2 \ \wedge x < 2\}$
g. $G = \{x/-4 < x < 7 \ \wedge x \neq 0\}$
h. $H = \{x \in \mathbb{R}/|x| \leq 2\}$

Ejercicio 14 Halle, en cada caso, el conjunto solución:

$A = \{x \in \mathbb{R}/3x - 4 < 5\}$

$B = \{x \in \mathbb{R}/-6x + 8 < -10\}$

$C = \{x \in \mathbb{R}/x + 3 \geq 0\}$

$D = \{x \in \mathbb{R}/|x - 3| = 8\}$

$E = \left\{x \in \mathbb{R}/\frac{3x + 10}{x + 7} < 2\right\}$

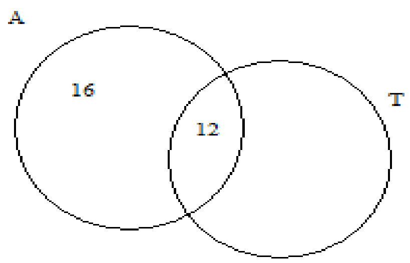
$F = \left\{x \in \mathbb{R}/\frac{10 - x}{x - 6} < 1\right\}$

$G = \{x \in \mathbb{R}/|x| \geq 5\}$

Ejercicio 15 El centro de estudiantes de una escuela organiza campeonatos de ajedrez, truco y dominó. Los alumnos pueden decidir su participación o no a los mismos. Se necesita saber:

a. ¿Cuántas posibilidades hay de anotarse en un solo juego?
b. ¿Cuántas en dos juegos?
c. ¿Cuántas en tres?

Ejercicio 16 Cuarenta y dos personas se anotan para participar en torneos de ajedrez o truco. No se encuentran las planillas de inscripción y se necesita saber cuántas



personas se anotaron para jugar sólo truco. Utiliza la siguiente información:

Ejercicio 17 Una persona tiene 16 autos, de los cuales 2 son de carrera y de color azul, 7 son de carrera y 5 son azules.

Identifique cada conjunto por extensión. Represente en un diagrama adecuado.

Responda:

a. ¿Cuántos autos de carrera no azules tiene esa persona?
b. ¿Cuántos autos azules que no son de carrera tiene?
c. ¿Cuántos autos tiene que no son azules ni de carrera?

Ejercicio 18 Nos informan que de 2150 empleados de una empresa, 1400 trabajan en turno mañana y 1250 lo hacen en turno tarde.

a. ¿Cuántos empleados trabajan en los dos turnos?
b. ¿Cuántos lo hacen en un solo turno?

Ejercicio 19 En un curso de 100 estudiantes se determina:

- 50 cursan por lo menos álgebra.
- 51 cursan por lo menos física.
- 52 cursan por lo menos geometría.
- 20 cursan por lo menos álgebra y física.
- 26 cursan por lo menos geometría y física.
- 18 cursan solamente geometría y álgebra.
- 17 cursan solamente geometría y física.

Determinar:

a. ¿Cuántos estudian sólo geometría?
b. ¿Cuántos estudian sólo física y álgebra?
c. ¿Cuántos estudian sólo álgebra?
d. ¿Cuántos estudian las tres asignaturas?
e. ¿Cuántos no cursan ninguna asignatura?