Matrices y Determinantes

Dada una **matriz cuadrada**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{12} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

se llama determinante de A, y se representa por $|A|$ ó $det(A)$, a un número real asociado a la matriz. Este número real se puede calcular, dependiendo del tamaño de la matriz, de las siguientes maneras:

- Cálculo de determinantes de órdenes 1, 2 y 3

Matriz de orden 1:

(1x1) $$A = (a_{11}) \Rightarrow \det(A) = a_{11}$$

Ejemplo : A= (15) ⇒ |15|= 15

Matriz de orden 2: (2X2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplo:

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$= 1. 4 - 2.3 = 4 - 6 = -2

Matriz de orden 3: (3x3)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Para resolver un determinante de orden mayor a 2 definimos

Menor Complementario: M_{ij}

Se llama menor complementario de un elemento de una matriz al determinante que resulta de eliminar la fila i y la columna j. En una matriz cualquiera A_{mxn} puede haber varios menores de un cierto orden p dado.

$$A = \left(\begin{array}{c|ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)$$

Adjunto de un elemento: $A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}$

Ejemplo: el número asociado a una matriz

$$A= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

El menor complementario Ma_{23} del elemento a_{23}; det (A) $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

Tacho fila 2 y columna 3

al tachar , siguiendo el orden nos queda $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.\,0 - 2.(-1) = +2$

Si queremos el menor complementario del elemento a_{12}

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 16$$ así podemos calcular de cada elemento.

<u>Adjunto de un elemento</u>: $A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}$ es el producto de $(-1)^{i+j}$ por el menor complementario del número.

Ejemplo: a) El **adj A_{33}** = $M_{33}.(-1)^{3+3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}.(-1)^{3+3} = (1.5 - 2.4).(-1)^6 = -2.1 =$ **-2**

b) adj $A_{21} = M_{21}.(-1)^{2+1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}.(-1)^3 = (2.4 - 3.0)\ (-1) = -8$

c) adj. $A_{13} = M_{13}.(-1)^{1+3} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.(-1)^4 = [\,4.\,0 - 5.(-1)\,].(+1) = 5$

Método de Laplace, o método de menores complementarios

Hallar el determinante de la matriz: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Elegimos una fila o columna cualquiera:

a) Elijo la fila dos

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4.\ Adj\ a_{12} + 5\ .\ Adj\ a_{22} + 0.\ Adj\ a_{23}$$

$$= 4.\ M_{12}\ .\ (-1)^{1+2} + 5.\ M_{22}\ .\ (-1)^{2+2} + 0.\ M_{23}\ (-1)^{2+3}$$

$$= 4. \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} . (-1)^{3} + 5. \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} . (-1)^{4} + 0. \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} . (-1)^{5}$$

$$= 4.(8 - 0) . (-1) + 5. [\ 4 - (-3)\ ] . 1 + 0 = -32 + 35 = \mathbf{3}$$

23

b) Elijo una columna cualquiera. Elijo la columna tres.

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \mathbf{3} \\ 4 & 5 & \mathbf{0} \\ -1 & 0 & \mathbf{4} \end{vmatrix} = 3.\ Adj\ a_{13} + 0\ .\ Adj\ a_{23} + 4.dj\ a_{33}$$

$$= \mathbf{3}.\ M_{13}\ .\ (-1)^{1+3} + \mathbf{0}.\ M_{23}\ .\ (-1)^{2+3} + \mathbf{4}.\ M_{33}\ (-1)^{3+3}$$

$$= \mathbf{3}. \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} . (-1)^{4} + \mathbf{0}. \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} . (-1)^{5} + \mathbf{4}. \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} . (-1)^{6}$$

$$= \mathbf{3}. [4.\ 0 - (-1)\ 5] . (+1) + \mathbf{0}. [\ 1.0 - (-1) .2] . (-1) + \mathbf{4}\ . [1\ .\ 5 - 2\ .4\ ]=$$

$$= 3.\ 5 \qquad + 0 \qquad + 4.\ (-3) =$$

$$= 15 - 12 = \mathbf{3}$$

Matriz inversa

Cálculo de la matriz inversa usando determinantes

Dada una matriz cuadrada A, se llama matriz adjunta de A, y se representa por $Adj(A)$, a la matriz de los adjuntos, $Adj(A) = (A_{ij})$.

Si tenemos una matriz tal que $det(A) \neq 0$, se verifica:

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[Adj(A)]^T}$$

$A= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ Det (A) = 3

Calculamos el adjunto de cada elemento:

Cálculos auxiliares.

Adj $a_{11}= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ = 1. 20 = 20 $\Rightarrow a_{11}= 20$

Adj $a_{12}= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ = (-1). 12 = -12 $\Rightarrow a_{12}= -12$

Adj $a_{13}= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ = 1. (-15) = -15 $\Rightarrow a_{13}= -15$

Adj $a_{21}= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ = (-1). 16= -16 $\Rightarrow a_{21}= -16$

Adj $a_{22}= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ =1.[4 –(-3)]= 1. 7 = 7 $\Rightarrow a_{22}= 7$

Adj $a_{23}= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ = (-1). (-12) = 12 $\Rightarrow a_{23}= 12$

Adj $a_{31}= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$ = 1. (+5)= 5 $\Rightarrow a_{31}= 5$

Adj $a_{32}= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ = -1.(+2) =-2 $\Rightarrow a_{32}= -2$

Adj $a_{33}= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ = -1.(5 - 8)= 3 $\Rightarrow a_{32}= 3$

Adj $A^T= \begin{pmatrix} 20 & -12 & -15 \\ -16 & 7 & 12 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 20 & -12 & -15 \\ -16 & 7 & 12 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{20}{3}} & \mathbf{-4} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{\frac{-16}{3}} & \mathbf{\frac{7}{3}} & \mathbf{4} \\ \mathbf{\frac{5}{3}} & \mathbf{\frac{-2}{3}} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$