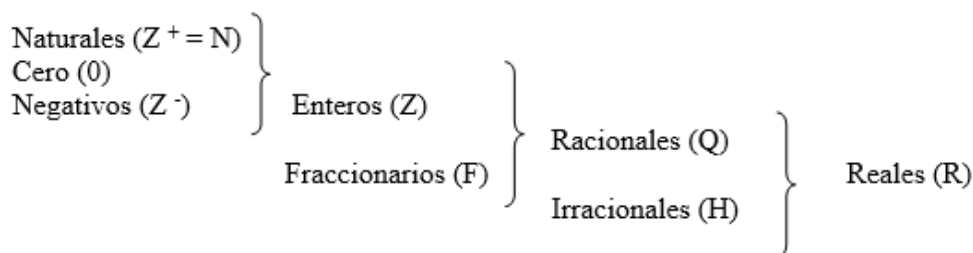


OPERACIONES CON NÚMEROS REALES. PROPIEDADES.

CONTENIDOS: Operaciones con números reales: suma, resta, producto, cociente. Propiedades de las operaciones. Producto y cociente de potencias de igual base. Potencia de potencia. Potencia de exponente negativo. Potencia de un producto y de un cociente. Radicación. Potencia de exponente fraccionario. Ejercicios combinados.

CONJUNTOS DE NÚMEROS REALES

Al conjunto formado por los números racionales y los irracionales se lo llama conjunto de los números reales y se lo designa con R.



OPERACIONES ELEMENTALES CON NÚMEROS REALES

Suma algebraica de fracciones.

a- De igual denominador

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \text{ con } b \neq 0 \quad \text{Ej.1 } \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \quad \text{Ej.2 } \frac{4}{7} - \frac{9}{7} = -\frac{5}{7}$$

b- De distinto denominador. Hay dos formas para resolverlo.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a.d \pm b.c}{b.d} \text{ con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0 \quad \text{Ej. } \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2.5 + 3.3}{3.5} = \frac{19}{15}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{(m \div b)a \pm (m \div d)c}{m} \text{ con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0 \text{ siendo } m = \text{mínimo común múltiplo entre } b \text{ y } d$$

$$\text{Ej. } \frac{3}{24} - \frac{5}{18} = \frac{(72 \div 24).3 - (72 \div 18).5}{72} = \frac{9 - 20}{72} = \frac{-11}{72}$$

Multiplicación de fracciones

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d} \text{ con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0 \quad \text{Ej. } \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2.1}{5.3} = \frac{2}{15}$$

División de fracciones

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.c} \text{ con } b \neq 0, c \neq 0 \text{ y } d \neq 0 \quad \text{Ej. } \frac{2}{3} \div \frac{5}{2} = \frac{2.2}{3.5} = \frac{4}{15}$$

Nota: Recordá "la regla de la herradura"

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

✓ Conmutativa de la suma y el producto

La suma o adición de dos números reales es conmutativa.

$$a + b = b + a \quad \text{Ej. } 2+5 = 5+2 = 7$$

El producto o multiplicación de dos números reales es conmutativo.

$$a.b = b.a \quad \text{Ej. } 2.5 = 5.2 = 10$$

✓ Asociativa de la suma y el producto

La suma algebraica de tres o más términos es asociativa.

$$a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$\text{Ej. } 2+5+9 = 2 + (5+9) = 2+14 = (2+5)+9 = 7+9 = 16$$

El producto de tres o más números reales es asociativa.

$$a . b . c = (a . b) . c = a . (b . c)$$

$$\text{Ej: } 2.5.9 = (2.5).9 = 10.9 = 2.(5.9) = 2.45 = 90 \rightarrow$$

Recordá que:

- ✓ El producto o el cociente de dos números reales de igual signo es un número real positivo. Ej. a) $-2.(-3)=6$ b) $-2/-4=1/2$ c) $2.4=8$
- ✓ El producto o cociente de dos números reales de diferente signo es siempre un número real negativo. Ej. a) $2.(-4)=-8$ b) $-6.2=-12$ c) $6/-3=-2$ d) $-8/2=-4$
- ✓ El elemento neutro para el producto o el cociente es el 1. Ej: a) $6.1=6$ b) $6/1=6$

✓ Distributiva del producto con respecto a la suma algebraica

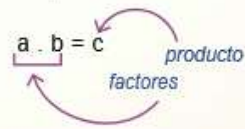
La multiplicación de números reales es distributiva respecto de la suma algebraica.

$$a . (b + c - d) = a . b + a . c - a . d$$

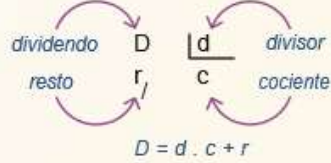
$$\text{Ej. } 2 . (5+9-3) = 2.5 + 2.9 - 2.3 = 22$$

Los números que intervienen en una **multiplicación** y en una **división** tienen nombres especiales.

Multiplicación



División



Propiedades de la multiplicación	
Asociativa: si se cambia el orden de los paréntesis, el resultado no cambia. $(5 \cdot 12) \cdot 4 = 5 \cdot (12 \cdot 4)$	Conmutativa: el orden de los factores no cambia el resultado. $6 \cdot 8 = 8 \cdot 6$
Disociativa: un factor se puede descomponer en otros factores. $7 \cdot 24 = 7 \cdot (2 \cdot 12)$	Elemento neutro: el número 1 como factor no cambia el resultado. $15 \cdot 1 = 1 \cdot 15 = 15$

Propiedad distributiva de la multiplicación

$$3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$$

$$(9 - 3) \cdot 2 = 9 \cdot 2 - 3 \cdot 2$$

Propiedad distributiva de la división

$$(12 + 4) : 2 = 12 : 2 + 4 : 2$$

$$(15 - 9) : 3 = 15 : 3 - 9 : 3$$

En la división, solo se puede distribuir el divisor.

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

La potenciación es una operación que permite escribir en forma abreviada una multiplicación de factores iguales

Se define la **potencia** de un número como:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}} \text{ se lee: "a elevado a la ene", donde n pertenece a los Naturales}$$

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16 \text{ "CUATRO ELEVADO AL CUADRADO"}$$

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \text{ "CUATRO ELEVADO AL CUBO"}$$

Sea $a^n = c$; a : es la base, n : exponente, c : potencia enésima de a

Si $n < 0$, entonces puedo reescribirla de la siguiente manera

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0$$

Ej:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a \neq 0$$

➤ La potenciación es distributiva respecto del producto y del cociente de las bases.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad \text{Ej. } (2 \cdot 5)^3 = (2)^3 \cdot (5)^3 = 1000$$

$$(a / b)^n = a^n / b^n \quad \text{con } b \neq 0 \quad \text{Ej. } (20 / 5)^3 = (20)^3 / (5)^3 = 64$$

➤ La potenciación es asociativa respecto del producto y del cociente de las bases cuando ambos exponentes son iguales.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad \text{Ej. } (2)^3 \cdot (5)^3 = (2 \cdot 5)^3 = 1000$$

$$a^n / b^n = (a / b)^n \quad \text{con } b \neq 0 \quad \text{Ej. } (20)^3 / (5)^3 = (20 / 5)^3 = 64$$

➤ La multiplicación de dos potencias de igual base los exponentes se suman siendo su base la misma.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{Ej. } 5^3 \cdot 5^2 = 5^{3+2} = 5^5 = 3125$$

➤ El cociente de dos potencias de igual base los exponentes se restan siendo su base la misma..

$$a^n / a^m = a^{n-m} \quad \text{Ej. } 5^3 / 5^2 = 5^{3-2} = 5$$

➤ La potencia de una potencia se obtiene tomando la misma base y por exponente el producto de ambas potencias.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad \text{Ej. } (2^2)^3 = 2^6 = 64$$

➤ Toda potencia con base distinta de cero cuyo exponente es cero, su valor es siempre igual a uno.

$$(a)^0 = 1 \quad a: \text{ base distinta de cero} \quad \text{Ej. } 5^0 = 1; \quad (-1/2)^0 = 1$$

➤ Toda potencia de exponente 1 es igual a la base.

$$a^1 = a \quad 5^1 = 5$$

Propiedades de la potenciación	Ejemplo
• Para multiplicar dos potencias de igual base , se escribe la misma base y se suman los exponentes.	$3^2 \cdot 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $= 3^{2+3} = 3^5$
• Para dividir dos potencias de igual base , se escribe la misma base y se restan los exponentes.	$2^5 : 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) : (2 \cdot 2)$ $= 2^{5-2} = 2^3$
• Para calcular la potencia de otra potencia , se escribe la misma base y se multiplican los exponentes.	$(5^2)^3 = (5 \cdot 5)^3$ $= (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5)$ $= 5^{2 \cdot 3} = 5^6$
• La potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación y a la división.	$(4 \cdot 3)^2 = 4^2 \cdot 3^2$ $(12 : 4)^2 = 12^2 : 4^2$

Teniendo en cuenta las propiedades de la potencia, completen V (verdadero) o F (falso). Si es falso justifique con la propiedad correcta y si es verdadero coloque la propiedad que usó.

$$(5 + 3)^2 = 5^2 + 3^2 \quad \boxed{F} \quad \text{Porque la potencia no es distributiva con respecto a la suma.}$$

$$3^4 = 12 \quad \square$$

$$(5 \cdot 3)^2 = 5^2 \cdot 3^2 \quad \square$$

$$(8 - 4)^2 = 8^2 - 4^2 \quad \square$$

$$(8 : 4)^2 = 8^2 : 4^2 \quad \square$$

$$2^3 = 3^2 \quad \square$$

$$(2^7)^2 = 2^7 \cdot 2^2 \quad \square$$

$$(4^3)^2 = 4^{3 \cdot 2} \quad \square$$

RADICACIÓN

La radicación es la operación inversa a la potenciación.

$$\sqrt[2]{64} = 8, \text{ porque } 8^2 = 64$$

Se define la **raíz** de un número como:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \quad \text{Se lee: "raíz enésima de a"; } a: \text{radicando, } n: \text{índice, } b: \text{raíz enésima}$$

$\sqrt{\quad}$: radical.

A tener en cuenta que:

- Si n es impar: $\sqrt[n]{a^n} = a$
- Si n es par: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

➤ La radicación es distributiva respecto del producto y del cociente excepto en aquellos casos donde el radicando sea negativo y el índice de la raíz sea par.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \text{Ej. } \sqrt[2]{4 \cdot 9} = \sqrt[2]{36} = \sqrt[2]{4} \cdot \sqrt[2]{9} = \pm 2 \cdot 3 = \pm 6$$

$$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} \quad \text{con } b \neq 0 \quad \text{Ej. } \sqrt[2]{4 : 9} = \sqrt[2]{4} : \sqrt[2]{9} = \pm 2 / 3$$

➤ La radicación de índice n se puede expresar como una potencia donde el exponente es $1/n$.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \text{Ej. a) } \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2 \quad \text{b) } \sqrt[4]{9^2} = 9^{\frac{2}{4}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \text{Ej. } \sqrt[2]{3^4} = 3^{\frac{4}{2}} = 3^2 = 9$$

IMPORTANTE : La potenciación y la radicación no son distributivas ni asociativas con respecto a la suma y a la resta.

Propiedades de la radicación	Ejemplo
<ul style="list-style-type: none"> La radicación es distributiva con respecto a la multiplicación y a la división. 	$\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16}$ $\sqrt{64 : 16} = \sqrt{64} : \sqrt{16}$
<ul style="list-style-type: none"> Para multiplicar o dividir raíces de igual índice, se escribe una raíz con el mismo índice y con el radicando igual a la multiplicación o división de los radicandos dados, según corresponda. 	$\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8 \cdot 2}$ $\sqrt[3]{243} : \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{243 : 9}$

Completen V (verdadero) o F (falso). Justifique su respuesta con la propiedad correcta que usó.

$$\sqrt[2]{100} = 50 \quad \square$$

$$(3 + 2 + 5)^2 = 3^2 + 2^2 + 5^2 \quad \square$$

$$\sqrt[2]{9} + \sqrt[2]{16} = \sqrt[2]{25} \quad \square$$

$$\sqrt[2]{8} \cdot \sqrt[2]{2} = \sqrt[2]{16} \quad \square$$

$$\sqrt[2]{16} : \sqrt[2]{2} = \sqrt[2]{16 : 2} \quad \square$$

$$\sqrt[2]{16} + \sqrt[2]{2} = \sqrt[2]{16 + 2} \quad \square$$

Resuelve aplicando las propiedades cuando sea posible:

a) $2^{18} \cdot (2^5)^4 : (2^{30} \cdot 2^7) \cdot 2 =$

b) $\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[5]{5^3} \cdot \sqrt[5]{5^4} : \sqrt[5]{5^3} =$

c) $\sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[6]{8} : \sqrt[6]{2} =$

d) $\sqrt[2]{81 \cdot 64 : 144} =$

e) $4 \cdot (5 \cdot 7 + 10) + 270 : 30 - (18 - 4 \cdot 2) =$

f) $5^8 \cdot 5^{13} : 5^{19} + (4 \cdot 9 - 12)^0 - \sqrt{45} : \sqrt{5} =$

EJERCICIOS COMBINADOS

Para resolver este tipo de ejercicios:

1. Se separa en términos.
2. Se resuelven los cálculos que están dentro de los paréntesis.
3. Se resuelven las potencias y raíces.
4. Se resuelven las multiplicaciones y divisiones.
5. Se resuelven las sumas y restas.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{9}{121}} \cdot 11 - \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{25}{6} = \\ & \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{13}{6} \cdot \frac{25}{6} = \\ & \frac{9}{25} + \frac{13}{6} \cdot \frac{25}{6} = \\ & \frac{9}{25} + \frac{13}{25} = \\ & = \frac{22}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \sqrt{36} + 12 : 2 + 5^2 \cdot 3 - 6^{15} \cdot 6^8 : 6^{21} = \\ & 2 \cdot 6 + 12 : 2 + 25 \cdot 3 - 6^2 = \\ & 2 \cdot 6 + 12 : 2 + 25 \cdot 3 - 36 = \\ & 12 + 6 + 75 - 36 = \\ & 93 - 36 = \\ & = 57 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{5^2 + 12 \cdot 3 + 3} - (15 : 3 - 3)^2 + 144 : 12 = \\ & \sqrt{25 + 12 \cdot 3 + 3} - (15 : 3 - 3)^2 + 144 : 12 = \\ & \sqrt{25 + 36 + 3} - (5 - 3)^2 + 144 : 12 = \\ & \sqrt{64} - 2^2 + 12 = \\ & 8 - 4 + 12 = \\ & = 16 \end{aligned}$$

Para tener en cuenta al trabajar con los signos:

Regla de los signos	
Para la multiplicación	Para la división
$+. + = +$	$+: + = +$
$-. - = +$	$:- = +$
$+. - = -$	$+: - = -$
$-. + = -$	$:- = -$

El producto de dos números enteros de igual signo es un número positivo.	$4 \cdot 3 = 12$ $-5 \cdot (-2) = +10$
El producto de dos números enteros de distinto signo es un número negativo.	$4 \cdot (-3) = -12$ $(-5) \cdot 2 = -10$
El cociente de dos números de igual signo es un número positivo.	$14 : 7 = 2$ $-8 : (-2) = 4$
El cociente de dos números de distinto signo es un número negativo.	$14 : (-7) = -2$ $-8 : 2 = -4$

Actividad 1

Indica la opción que tiene la igualdad correcta

- a) $(a \cdot b^2)^3 = a^3 \cdot b^5$
- b) $(a + b)^4 = a^4 + b^4$
- c) $a^m + b^n = (a \cdot b)^{m+n} =$
- d) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \frac{b^3}{a^3}$

Actividad 2

Usar el signo $=$ o \neq , según corresponda para que las expresiones sean verdaderas.

$(12 - 4) - 2$ $12 - (4 - 2)$

$2^3 + 3^2$ $(2 + 3)^2$

$\frac{9 \cdot 8}{6}$ $\frac{9}{6} \cdot \frac{8}{6}$

$\frac{9+6}{9-6}$ $\frac{3+2}{3-2}$

$\frac{4^3 + 4^2}{4}$ $4 + 4^2$

Actividad 3

Unir con flecha según corresponda

- | | |
|---------------------|---------------|
| $a+a+a$ | a^2+a |
| $a \cdot a$ | $4 \cdot a^2$ |
| $3 \cdot a \cdot a$ | $3 \cdot a$ |
| $a^2 \cdot a$ | $2 \cdot a^2$ |
| $(2 \cdot a)^2$ | a^3 |
| $a^2 + a^2$ | $3 \cdot a^2$ |

a^2+a

a^2

Actividad 4

Resolver los siguientes ejercicios combinados teniendo en cuenta todas las propiedades vista y use la calculadora lo menos posible.

Nos interesa el "proceso" y no el resultado .

a. $\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{5} - \frac{2}{15} = \boxed{\frac{2}{45}}$

d. $\sqrt{\frac{25}{121}} \cdot \frac{11}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{29}{36}}$

b. $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{8}\right) \cdot \left(\frac{54}{5} - \frac{12}{5} \cdot \frac{9}{4}\right) = \boxed{\frac{27}{10}}$

e. $\left(\frac{12}{4} \cdot \frac{5}{24}\right)^2 + \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \boxed{\frac{73}{64}}$

c. $\frac{5}{2} + \frac{10}{6} : \frac{15}{12} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{7}{2}}$

f. $\frac{5}{9} + \sqrt[4]{\frac{1296}{256}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \boxed{\frac{23}{27}}$

Resuelvan.

a. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 : \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{9}{4}} + \frac{1}{5} = \boxed{\frac{19}{20}}$

d. $\sqrt{\frac{16}{25}} + \frac{7}{2} : \frac{14}{4} \cdot 13 - \sqrt{\frac{49}{5}} = \boxed{\frac{62}{5}}$

b. $\sqrt{\frac{2}{5} + \frac{6}{25}} \cdot \frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{27}{8}} - \frac{2^3}{5} = \boxed{\frac{3}{10}}$

e. $\sqrt{2} \cdot \frac{18}{25} + \sqrt{1 + \frac{21}{100}} - \frac{3}{5} = \boxed{\frac{17}{10}}$

c. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{13} + \frac{2}{3} - \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \boxed{\frac{1}{4}}$

f. $\sqrt[3]{\frac{3}{5}} \cdot \frac{9}{4} + \sqrt[4]{81} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{71}{16}}$
