¿CÓMO RESOLVEMOS ECUACIONES O INECUACIONES?

Necesitan tener estrategias de resolución claras y ejercitadas para aplicarlas cuando sea necesario.

ECUACIÓN LINEAL E INECUACIÓN LINEAL

a) ax+b = 0

b) ax+b > 0 (Podemos utilizar los siguientes símbolos de desigualdad: < $(menor)$, $\leq (menor\ o\ igual), < (mayor), \geq (mayor\ o\ igual)$

Estrategia de resolución: despejar x ¿Cómo?

En la práctica realizamos el despeje de x realizando pasaje de términos y factores.

Por ejemplo:

$$2x+3=x-5 \Leftrightarrow 2x-x+3+5=0 \Leftrightarrow x+8=0 \Leftrightarrow x=-8$$

c) Si tenemos una inecuación lineal también vamos a despejar x, teniendo en cuenta las propiedades de la desigualdad que se cumplen en los números reales.

$a \in \Re, b \in \Re, c \in \Re$

1)Si $a<b$ entonces $a+c < b+c$

2) Si $a<b$ y $c>0$ entonces $a.c < b.c$

3) Si $a<b$ y $c<0$ entonces $a.c > b.c$

Por ejemplo:

$$2x-3>4x+2 \Leftrightarrow 2x+(-4x)-3+(-2) > 4x+(-4x)+2+(-2)$$

$$\Leftrightarrow 2x-4x-3-2>0 \Leftrightarrow -2x-5>0 \Leftrightarrow -2x-5+5>+5 \Leftrightarrow -2x.\frac{-1}{2} < 5.\frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}$$

Se aplicaron las propiedades 1) y 3)
Por supuesto que se despeja x en forma práctica, solamente escribimos los términos que necesitamos sumar o números que necesitamos multiplicar en el segundo miembro.

Ecuación e inecuación cuadráticas

a) $ax^2+bx+c=0$ $\qquad ax^2+bx+c > 0$ (cualquier símbolo de desigualdad es válido)

Para resolver una ecuación cuadrática utilizamos la formula resolvente para obtener los ceros o raíces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 1)

$(x+1)^2-3(2x+1) = 4$

$\Leftrightarrow (x+1).(x+1) - 6x - 3 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + x + 1 - 6.x - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 6 = 0$

a=1 b=-4 c=- 6

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.(-6)}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 2 \pm \sqrt{10}$$

INECUACIÓN CUADRÁTICA: $ax^2+bx+c > 0$

¿Cómo la resolvemos en forma práctica?

Tenemos en cuenta los signos en una multiplicación.

+.+ = + - . - = +
+.- = - - . + = -

Por lo tanto, para aplicar la regla de signos debemos tener un producto de factores.
La expresión en el primer miembro de la desigualdad es un polinomio de grado 2 completo ax^2+bx+c, **el segundo miembro es cero**. Lo factoreamos. ¿Cómo?

$ax^2+bx+c = a (x- x_1). (x- x_2)$ siendo x_1 y x_2 los ceros o raíces que las hallamos con la fórmula resolvente de una ecuación cuadrática.

Ejemplo 2)

$x^2 - 4x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x - (2 + \sqrt{10})).(x - (2 - \sqrt{10})) \geq 0$

O sea, el producto de los dos factores puede **ser positivo o cero**
Para que sea positivo los factores pueden ser ambos positivos o ambos negativos.

FORMA PRÁCTICA (siempre el segundo miembro igualado a cero)

Podemos organizar la información que vamos a obtener **en una tabla** o **recta numérica**.

1) Ubicamos los ceros o raíces de la ecuación cuadrática. En esos valores el producto da 0.
2) Analizamos los signos de la multiplicación en los tres subconjuntos en los cuales
3) Nos queda dividida la recta en tres subconjuntos (sectores). Consideramos un valor cualquiera en cada subconjunto y evaluamos su signo en la expresión $(x - (2 + \sqrt{10})).(x - (2 - \sqrt{10}))$

$x<2-\sqrt{10}$		$2-\sqrt{10}<x<2+\sqrt{10}$		$x>2+\sqrt{10}$
Positivo (+)	$2-\sqrt{10}$	Negativo (-)	$2+\sqrt{10}$	positivo (+)

Solución= $(-\infty, 2-\sqrt{10}] \cup [2+\sqrt{10}, +\infty)$

OTRAS FORMAS PARA RESOLVER LAS ECUACIONES DE GRADO 2

Para poder resolver una ecuación cuadrática incompleta aplicamos la propiedad. $\sqrt{x^2} = |x|$

$-2x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$-2x^2 = -3 \Leftrightarrow -2 \div (-2) \cdot x^2 = -3 \div (-2) \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = |x| = \sqrt{\frac{3}{2}}$; $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ o $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

RESOLVEMOS LA ECUACIÓN DE GRADO 3

c) $x^3 + 2x^2 = 0$

Observamos que podemos factorear y aplicar la propiedad:

Si a. b=0 entonces a=0 ó b=0

Sacamos factor común x^2

$x^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$ ó $x+2=0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $x = -2$

RESOLVEMOS LA INECUACIÓN DE GRADO 3

$x^3 + 2x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2(x+2) > 0$

FORMA PRÁCTICA (siempre el segundo miembro igualado a cero)

1) Obtenemos los ceros o raíces de cada factor: $x^2 = 0$ ó $x = -2$

2) Ubicamos los ceros o raíces de la ecuación cuadrática. En esos valores el producto da 0.
3) Analizamos los signos de la multiplicación en los tres subconjuntos en los cuales queda divida la recta. Elegimos **cualquier valor numérico** (por ejemplo: 3, -1 y 3) en cada subconjunto y evaluamos la expresión $x^3 + 2x^2 > 0$

$x<-2$		$-2<x<0$		$x>0$
Negativo x=-3	-2	Positivo x= -1	0	Positivo x= 3

Escribimos el conjunto solución:

S= $(-2;0) \cup (0;+\infty)$

INECUACIÓN FRACCIONARIA

$\frac{x-1}{3x+2}>0$ ¿Cómo podés resolverla?

Procedemos de acuerdo con un razonamiento lógico.
Si tenemos una división que nos tiene que dar un resultado positivo tenemos dos posibilidades:

1) Que el numerador y denominador sean ambos positivos

O que:

2) el numerador y denominador sean ambos negativos

Podemos resolver la inecuación en **FORMA PRÁCTICA**

a) Buscamos los ceros del numerador y del denominador

x-1= 0 $\Rightarrow x=1$

3x+2=0 $\Rightarrow x = \frac{-2}{3}$

Si ubicamos x=1 y x=$\frac{-2}{3}$ en una recta numérica, nos queda dividida en tres subconjuntos. Analizamos que signo toma la cuenta de dividir en cada subconjunto:

1) Para valores de x> 1 (consideramos cualquier número mayor a 1, por ejemplo, x=2. Realizamos la cuenta con ese valor. $\frac{2-1}{3\cdot 2+2}=\frac{1}{8}$ o sea, nos da un valor **positivo**. Por lo tanto, para cualquier valor de x mayor a 1, la cuenta de dividir será siempre **positiva.**

2) Para valores de x comprendidos entre $\frac{-2}{3}$ y 1. O sea $\frac{-2}{3}$<x<1. Por ejemplo, podemos considerar x=0. Realizamos la cuenta con ese valor. $\frac{0-1}{3\cdot 0+2}=-\frac{1}{2}$ o sea, nos da un valor **negativo**. Por lo tanto, para cualquier valor de x comprendido entre $\frac{-2}{3}$ y 1 la cuenta de dividir será siempre **negativa**.

3) Para valores de x< $\frac{-2}{3}$. Consideramos por ejemplo x= -1. Realizamos la cuenta con ese valor $\frac{-1-1}{3\cdot(-1)+2}=2$ o sea nos da un valor **positivo**. Por lo tanto, para cualquier valor de x menor a, $\frac{-2}{3}$ la cuenta de dividir será siempre **positiva**.

Positivo x= -1	0	Negativo x = 0	1	Positivo x= 2

Como estamos buscando valores de x que arrojen un valor positivo de la cuenta de dividir, nos quedamos con los siguientes intervalos que formarán nuestro dominio.

$$S = \left(-\infty, \frac{-2}{3}\right) \cup (1, +\infty)$$

ECUACIONES E INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Ejemplo 1:

|-2x+1|=3 sabemos por definición de valor absoluto que:

-2x+1 = 3 ó -2x+1= - 3 y despejamos la x.

Ejemplo 2:

- |-4x-1|-3=5x. Debemos tener presente que para aplicar la definición de valor absoluto en el primer miembro solamente debemos tener la expresión afectada por las barras de módulo:

$$-|-4x-1|-3 = 5x \rightarrow -|-4x-1| = 5x+3 \rightarrow |-4x-1| = -(5x+3)$$

Ahora extraemos las barras de módulo considerando que la expresión encerrada entre las mismas puede ser POSITIVA O NEGATIVA

$$-4x-1 = -5x-3 \quad o \quad -4x-1 = -(-5x-3)$$

Resolvemos ambas ecuaciones lineales y lo importante para determiner la solución es VERIFICAR

PARA LAS INECUACIONES:

Utilizamos las propiedades notables

a) $$|x| \le k \Leftrightarrow -k \le x \le k \Leftrightarrow x \in [-k, k]$$
$$|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k \Leftrightarrow x \in (-k, k)$$

b) $$|x| \ge k \Leftrightarrow x \le -k \ o \ x \ge k \Leftrightarrow x \in (-\infty, -k] \cup [k, +\infty)$$
$$|x| > k \Leftrightarrow x < -k \ o \ x > k \Leftrightarrow x \in (-\infty, -k) \cup (k, +\infty)$$

Por ejemplo: $\left|\frac{x}{x-1}\right| < 2 \Leftrightarrow -2 < \frac{x}{x-1} < 2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} > -2 \ \ y \ \ \frac{x}{x-1} < 2$

Resolvemos cada una de las inecuaciones fraccionarias aplicando la FORMA PRÁCTICA (siempre igualado a cero el segundo miembro)

$$\frac{x}{x-1} > -2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} + 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{x-2(x-1)}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-2x+2}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x+2}{x} > 0$$

1) Buscamos ceros o raíces del numerador y denominador

-x+2 = 0 →2=x
x=0

2) Ubicamos en una recta numérica

x<0		0<x<2		x>0
x=-1 $\frac{-(-1)+2}{-1} = -3$	**0**	x=1 $\frac{-1+2}{1} = 1$	**2**	x= 3 $\frac{-3+2}{3} = \frac{-1}{3}$
NEGATIVO		POSITIVO		NEGATIVO

Estamos buscando valores de x que hagan que nuestra cuenta $\frac{-x+2}{x}$ nos dé un resultado positivo (o sea mayor a cero). Esos valores se encuentran en los intervalos: $(-\infty;0) \cup (2;+\infty)$

$$\frac{x}{x-1} < 2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{x-(x-1)}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-x+1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 0$$

1) Buscamos ceros o raíces del denominador (obviamente del numerador no porque es 1)
x=0
2) Ubicamos en una recta numérica

x<0		x>0
$\frac{1}{-1} = -1$	0	x=1 $\frac{1}{1} = 1$
NEGATIVO		POSITIVO

Estamos buscando valores de x que hagan que nuestra cuenta $\frac{-x+2}{x}$ nos dé un resultado negativo (o sea menor a cero). Esos valores se encuentran en el intervalo: $(-\infty;0)$

¿Cómo escribimos finalmente los valores de x que cumplen la condición dada: $\left|\frac{x}{x-1}\right| < 2$?

Debemos tener en cuenta que la expresión $\frac{x}{x-1} > -2 \;\; y \;\; \frac{x}{x-1} < 2$ nos indica a través de "y "que debemos hallar la intersección entre los intervalos hallados:

$(-\infty;0) \cup (2;+\infty) \cap (-\infty;0) = (-\infty;0) =$ Solución