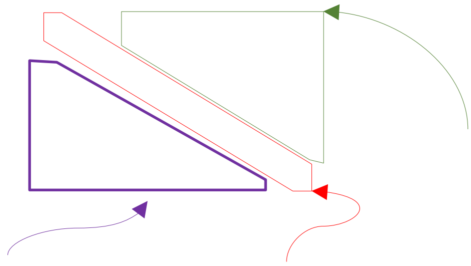


Diagonal principal:

- <u>Traza de una matriz</u>: La traza de una matriz $A \in R^{nxn}$, denotada por $tr(A)$, es la suma de todos los elementos de la diagonal principal.

  Ejemplo (anterior):

  $$tr(A)=5+0+18+0$$

  $$tr(A)=23$$

  <u>Propiedades de la traza:</u>

  - $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$
  - $tr(A.B)=tr(B.A)$
  - $k \in R, tr(k.A)=k.tr(A)$

- <u>Matriz triangular</u>
  - *Matriz triangular superior*: es toda matriz cuadrada donde todos los elementos que se encuentran por debajo de la diagonal principal son ceros.

    $$A=((a_{ij})) \in R^{nxn}\ es\ matriz\ triangular\ superior\ si\ a_{ij}=0, \forall i>j.$$

    Ejemplos:

    $$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

    La matriz nula de orden *n* es una matriz triangular superior.

- *Matriz triangular inferior*: es toda matriz cuadrada donde todos los elementos que se encuentran por sobre de la diagonal principal son ceros.

  $A=\left(\left(a_{ij}\right)\right)\in R^{nxn}\, es\, matriz\, triangular\, inferior\, si\, a_{ij}=0\,,\forall i<j\,.$

  Ejemplos:

  $$C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix} \quad ; \quad D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 0\\ 7 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

  La matriz nula de orden n es una matriz triangular inferior.

- Matriz diagonal: es aquella matriz cuadrada donde todos los elementos que no están en la diagonal principal son ceros.

  $A=\left(\left(a_{ij}\right)\right)\in R^{nxn}\, es\, matriz\, diagonal\, si\, a_{ij}=0\,,\forall i\neq j\,.$

  Ejemplos:

  $$E=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad ; \quad F=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

  La matriz nula de orden n es una matriz diagonal.

  Observación: Puede ocurrir que una matriz diagonal tenga uno o más ceros en la diagonal principal.

  - *Matriz escalar*: es aquella matriz diagonal que tiene todos los elementos de la diagonal principal iguales.

    $A=\left(\left(a_{ij}\right)\right)\in R^{nxn}\, es\, matriz\, escalar\, si\, a_{ij}=\begin{cases}0\, si\, i\neq j\\ k\, si\, i=j\end{cases}.$

    Ejemplos:

    $$G=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} \quad ; \quad H=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

    La matriz nula de orden n es una matriz escalar.

Operaciones con matrices

Trasposición de matrices

Dada una matriz de orden $m\, x\, n$, $A=\left(a_{ij}\right)$, se llama matriz traspuesta de A, y se representa por A^T, a la matriz que se obtiene cambiando las filas por las columnas (o viceversa) en la matriz A.

Propiedades de la trasposición de matrices

1. Dada una matriz A, siempre existe su traspuesta y además es única.

2. $\left(A^T\right)^T = A$.

- Matriz simétrica: Una matriz cuadrada A es simétrica si $A = A^T \Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$.
- Matriz antisimétrica: Una matriz cuadrada A es antisimétrica si $A = A^T \Rightarrow a_{ij} = -a_{ji}$.

Suma y diferencia de matrices

La suma de dos matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ de la misma dimensión, es otra matriz $C = (c_{ij})$ de la misma dimensión que los sumandos y con término genérico $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Por tanto, para poder sumar dos matrices estas han de tener la misma dimensión.

La suma de las matrices A y B se simboliza por $A + B$.

Propiedades de la suma de matrices

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (propiedad asociativa)

2. $A + B = B + A$ (propiedad conmutativa)

3. $A + O = A$ (O es la matriz nula)

4. La matriz $-A$, que se obtiene cambiando de signo todos los elementos de A, recibe el nombre de matriz opuesta de A, ya que $A + (-A) = O$.

5. La diferencia de matrices A y B se representa por $A - B$, y se define como: $A - B = A + (-B)$.

Producto de una matriz por un número

El producto de una matriz $A = (a_{ij})$ por un número real k es otra matriz $B = (b_{ij})$ de la misma dimensión que A y tal que cada elemento b_{ij} de B se obtiene multiplicando a_{ij} por k: $b_{ij} = k . a_{ij}$.

El producto de la matriz A por el número real k se designa por $k \cdot A$. Al número real k se le llama también escalar, y a este producto, producto de escalares por matrices.

Propiedades del producto de una matriz por un escalar

1. $k(A + B) = kA + kB$ (propiedad distributiva)

2. $(k + h)A = kA + hA$ (propiedad distributiva)

3. $k(hA) = (kh)A$ (propiedad asociativa)

4. $1 \cdot A = A$ (elemento neutro)

Producto de matrices

Dadas dos matrices $A \in R^{n x m}$ y $B \in R^{mx q}$, su producto es otra matriz P cuyos elementos se obtienen multiplacando las filas de A por las columnas de B. Los elementos de P son de la forma:

$$p_{ij}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}.b_{kj}$$

El producto de dos matrices se puede definir sólo si el número de columnas de la matriz izquierda es el mismo que el número de filas de la matriz derecha. Es más, si A tiene dimensión $n x m$ y B dimensión $m x q$, la matriz P será de orden $n x q$.

Propiedades del producto de matrices

1. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$
2. El producto de matrices no es conmutativo: $A.B\neq B.A$
3. Si A es una matriz cuadrada de orden n se tiene $A\cdot I_n=I_n\cdot A=A$
4. Dada una matriz cuadrada A de orden n, no siempre existe otra matriz B tal que $A\cdot B=B\cdot A=I_n$. Si existe dicha matriz B, se dice que es la matriz inversa de A y se representa por A^{-1} .
5. El producto de matrices es distributivo respecto de la suma de matrices, es decir: $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

Observaciones:

1. Si $A\cdot B=O$ no implica que $A=O$ ó $B=O$.
2. Si $A\cdot B=A\cdot C$ no implica que $B=C$.
3. En general $(A+B)^2\neq A^2+B^2+2AB$
4. En general $(A+B)\cdot(A-B)\neq A^2-B^2$

- Matriz Ortogonal: Es una matriz cuadrada A que verifica $A.A^T=I$.

Determinantes

Dada una matriz cuadrada

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{12} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mj} & ... & a_{mn} \end{vmatrix}$$

se llama determinante de A, y se representa por $|A|$ ó $det(A)$, a un número real asociado a la matriz. Este número real se puede calcular, dependiendo del tamaño de la matriz, de las siguientes maneras:

- <u>Cálculo de determinantes de órdenes 1, 2 y 3</u>

  Matriz de orden 1:

$$A=(a_{11})\Rightarrow det\,(A)=a_{11}$$

  Matriz de orden 2:

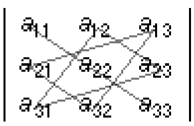
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\Rightarrow det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

  Matriz de orden 3:

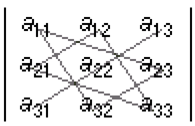
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$det\,(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

  En este último caso, para acordarnos de todos los productos posibles y sus correspondientes signos se suele usar la Regla de Sarrus, que consiste en un esquema gráfico para los productos positivos y otro para los negativos:



(Para los tres productos positivos).



(Para los tres productos negativos).

  Observación: La regla de Sarrus es válida sólo para la resolución de determinantes $3x3$.

- <u>Cálculo de un determinante por los adjuntos de una línea</u>

  Sea A una matriz cuadrada y a_{ij} uno cualquiera de sus elementos. Si se suprime la fila i y la columna j de la matriz A se obtiene una matriz M_{ij} que recibe el nombre de matriz complementaria del elemento a_{ij}.

  Dada la matriz:

$$
A = \left(\begin{array}{c|ccccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
\hline
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{array}\right)
$$

la matriz complementaria del elemento a_{11} es la matriz que resulta de suprimir en la matriz A la fila 1 y la columna 1; es decir:

$$
\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}
$$

El determinante de una matriz cuadrada es igual a la suma de los elementos de una fila o columna cualquiera, multiplicados por sus adjuntos.

Por ejemplo, si desarrollamos un determinante de orden n por los adjuntos de la fila 1 se tiene:

$$
det(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{1i} A_{1i}
$$

Con esta regla reducimos el orden del determinante que se pretende calcular en una unidad. Para evitar el cálculo de muchos determinantes conviene elegir líneas con muchos ceros.

Propiedades de los determinantes

- Si todos los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz cuadrada se descomponen en dos sumandos, entonces su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en esa línea los primeros y segundos sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial.

- Si se multiplican todos los elementos de una línea de una matriz cuadrada por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

  - Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, entonces se verifica:
  $$det(A \cdot B)=det(A) \cdot det(B)$$

- Si permutamos dos líneas paralelas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo con respecto al inicial.

- Si $A \in R^{nxn}$ y $k \in R$, entonces el determinante $det(kA)=k^n det(A)$

- Si una matriz cuadrada tiene una línea con todos los elementos nulos, su determinante vale cero.
- Si una matriz cuadrada tiene dos líneas paralelas iguales, su determinante vale cero.
- Si dos líneas paralelas de una matriz cuadrada son proporcionales, su determinante se anula.
- Si una fila (columna) de una matriz cuadrada es combinación lineal de las restantes filas (columnas), su determinante vale cero.
- El determinante de una matriz A es igual al determinante de su traspuesta.
- Si a una línea de una matriz cuadrada se le suma otra paralela multiplicada por un número, su determinante no varía.
- El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal.

Cálculo de determinantes por el método de Gauss

Se conoce como método de Gauss. Dicho método consiste en hallar un determinante equivalente (con el mismo valor) al que se pretende calcular, pero de una matriz triangular. De esta forma el problema se reduce a calcular un determinante de una matriz triangular, usando las propiedades de los determinantes.

Para conseguir triangular el determinante se pueden aplicar las siguientes operaciones:

- Permutar 2 filas ó 2 columnas.
- Multiplicar o dividir una línea por un número no nulo.
- Sumarle o restarle a una línea otra paralela multiplicada por un número no nulo.

Matrices inversibles

Si $A \cdot B = B \cdot A = I$, en tal caso, podemos decir que B es la inversa de A. La simbolizamos $B = A^{-1}$.

Una matriz cuadrada que posee inversa se dice que es inversible o regular; en caso contrario recibe el nombre de singular, no inversible o no regular.

Propiedades de la inversión de matrices

1. La matriz inversa, si existe, es única.
2. $A^{-1} A = A \cdot A^{-1} = I$
3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

4. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

5. $(kA)^{-1}=k^{-1}\cdot A^{-1}, k\neq 0$

6. $\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$

7. $A^{-1}=A^{T}, si\ A\ es\ ortogonal$

<u>Cálculo de la matriz inversa usando determinantes</u>

Dada una matriz cuadrada A, se llama matriz adjunta de A, y se representa por $Adj(A)$, a la matriz de los adjuntos, $Adj(A)=(A_{ij})$.

Si tenemos una matriz tal que $det(A)\neq 0$, se verifica:

$$A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\left[Adj(A)\right]^{T}$$

<u>Menor Complementario</u>: M_{ij}

Se llama menor complementario de una matriz al determinante que resulta de eliminar la fila i y la columna j. En una matriz cualquiera $A_{m\,x\,n}$ puede haber varios menores de un cierto orden p dado.

Rango (o característica) de una matriz es el orden del mayor de los menores distintos de cero. El rango o característica de una matriz A se representa por $r(A)$. El rango no puede ser mayor al número de filas o de columnas.

<u>Adjunto de un elemento</u>: $A_{ij}=(-1)^{i+j}.M_{ij}$

<u>Transformaciones elementales</u>

Son las transformaciones que podemos realizarle a una matriz sin que su rango varíe. Es fácil comprobar que estas transformaciones no varían el rango usando las propiedades de los determinantes.

1. Si se permutan 2 filas ó 2 columnas el rango no varía.

2. Si se multiplica o divide una línea por un número no nulo el rango no cambia.

3. Si a una línea de una matriz se le suma o resta otra paralela multiplicada por un número no nulo el rango no varía.

4. Se pueden suprimir las filas o columnas que sean nulas, las filas o columnas que sean que sean proporcionales a otras, sin que el rango de la matriz varíe.

<u>Método de Gauss</u>

El método de Gauss consiste en aplicar transformaciones elementales a una matriz con objeto de conseguir que los elementos que están por debajo de la diagonal principal se anulen ($a_{ij}=0, i>j$). Decimos que triangulamos la matriz. Los elementos de la diagonal principal son elementos no nulos, salvo que la fila sea nula.

Una vez aplicado este proceso de triangulación, el rango de la matriz es el número de filas no nulas de la matriz obtenida. Esto es fácil probarlo usando las propiedades de los determinantes.

Sistemas Lineales de Ecuaciones

Un sistema de ecuaciones lineales (s.e.l) es un conjunto de m ecuaciones con n incógnitas de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

donde a_{ij} son los coeficientes, x_i las incógnitas y b_i son los términos independientes.
El sistema anterior se puede expresar en forma matricial, usando el producto de matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Podemos escribir: $A_{mxn} \cdot X_{n\,x1}=B_{m\,x1}$, donde la matriz A de orden $m\,x\,n$ se denomina matriz de coeficientes.

También usaremos la matriz ampliada, que representaremos por A', que es la matriz de coeficientes a la cual le hemos añadido la columna de los términos independientes:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Discusión de un sistema de ecuaciones: *Teorema de Rouché-Fröbenius*

Dado un sistema de ecuaciones con matriz de coeficientes A, matriz ampliada A' y rangos respectivos $r(A)$ y $r(A')$ se verifica:

- El sistema de ecuaciones es compatible **S.C.** cuando $r(A)=r(A')$.
  En caso de compatibilidad existen dos posibilidades:

  Si $r(A)=r(A')=n$ (n: nº de incógnitas): ***Sistema compatible determinado S.C.D.*** (una única solución).

Si $r(A)=r(A')<n$ (n: nº de incógnitas): ***Sistema compatible indeterminado* S.C.I.** (infinitas soluciones).

Al valor $g.l.=n-r$ se le llama grado de libertad del sistema. Nos indica el número de variables independientes.

- Si $r(A)\neq r(A')$ el sistema es Incompatible **S.I.** no tiene solución.